Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

***На правах рукописи***

Святловский Михаил Владимирович

# Строго позитивные фрагменты модальных логик

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик РАН
Беклемишев Лев Дмитриевич

Москва — 2023

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)"

**Актуальность темы исследования и степень ее разработанности**

Данная работа посвящена исследованию строго позитивных фрагментов модальных логик. Такие фрагменты рассматривались ранее в контексте универсальной алгебры, в изучении дескрипционных логик и в логике доказуемости.

Строго позитивные модальные формулы строятся из переменных и константы $\top$ с помощью связок $\wedge$ и $\Diamond$. Соответственно, с точки зрения универсальной алгебры, импликации между строго позитивными формулами (далее *секвенции*) соответствуют тождествам в языке нижних полурешеток с несколькими монотонными операторами. Строго позитивные логики при этом соответствуют многообразиям таких алгебр.

Одной из первых работ в этом направлении была работа М. Джексона [1], в которой были рассмотрены полурешетки с операторами замыкания (closure semilattices, CSL) и описана решетка подмногообразий нормальных CSL, то есть решетка расширений строго позитивной логики $\mathcal{SP}(S5)$. Там же было показано, что у многообразий конечных CSL с единицей имеется конечный базис.

Строго позитивные модальные логики играют большую роль в исследованиях по теории онтологических баз данных и дескрипционной логике. Онтологическими базами данных называются базы данных, снабженные некоторой, с необходимостью ограниченной, возможностью делать логические выводы на основе имеющихся фактов. В целях вычислительной эффективности в онтологических базах данных используются специализированные языки (такие как OWL), которые строятся на основе так называемых *дескрипционных логик*. С теоретической точки зрения дескрипционные логики могут рассматриваться как варианты модальных логик. В виду актуальности рассматриваемых задач, исследование дескрипционных логик и связанных с ними задач в настоящее время представляет собой активно развивающуюся и важную прикладную область исследований.

Одной из важных проблем в области дескрипционной логики является построение таких логических языков, которые были бы одновременно достаточно выразительны и эффективны при использовании в онтологических базах данных. В этом отношении язык строго позитивной модальной логики представляет удобный компромисс между выразительностью и эффективностью.

Так, в базе медицинской терминологии SNOMED CT применяется строго позитивная логика $\mathcal{EL}$, описанная в работах [2, 3, 4] вместе с эффективным разрешающим алгоритмом. Логика $\mathcal{EL}$ позволяет находить ответ на запрос за полиномиальное время от длины запроса и размера базы данных, что показано в работе [2]. Для многих дескрипционных логик были известны алгоритмы, которые работают в худшем случае экспоненциальное время, но вполне применимы на практике благодаря оптимизациям. В работе [4] показано, что алгоритм для логики $\mathcal{EL}$ не уступает таким алгоритмам в производительности.

Другим источником интереса к строго позитивным модальным логикам являются исследования в области логики доказуемости. В настоящее время логики доказуемости активно применяются для анализа свойств формальных аксиоматических теорий [5], в том числе для изучения их ординальных характеристик и построения канонических систем ординальных обозначений. Как оказалось, для многих приложений в теории доказательств достаточно использовать язык строго позитивной логики доказуемости, который приводит к более простым системам, чем системы на основе полного языка модальной логики.

Так, активно применяемая в этой области полимодальная логика доказуемости $GLP$ не полна по Крипке [6] и PSPACE-полна [7], в то время как её строго позитивный фрагмент $RC$ одновременно полон по Крипке и полиномиально разрешим [8]. Замкнутый фрагмент логики $RC$, как показано в [5], представляет собой естественную систему ординальных обозначений для характеристического ординала арифметики Пеано $\varepsilon_0$. Именно эта система используется при анализе формальной арифметики и ее фрагментов на основе методов логики доказуемости.

Далее, в работах Л.Д. Беклемишева [9, 10, 11] и других авторов [12, 13, 14, 15, 16] были предложены новые арифметические интерпретации строго позитивных логик — например, для логик $RC$ и $RC\omega$ модальности соответствуют равномерным принципам рефлексии. Логика $RC\omega$ при этом тоже полиномиально разрешима и полна относительно простого класса конечных моделей Крипке. В целом, можно сказать, что аппарат строго позитивной логики занял важное место в исследованиях по логике доказуемости и ее применениям к ординальному анализу логических теорий.

В настоящей работе рассматриваются вопросы общей теории строго позитивных логик, не связанные с конкретными применениями этих логик в дескрипционной логике или теории доказательств, которые, однако, могут быть полезными для понимания специфики строго позитивных логик в каждой из этих областей приложений. Вопросы общей теории строго позитивных логик рассматривались в нескольких работах М. Захарьящева, Ф. Вольтера, А. Куруш, С. Кикотя и других [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

Особенно важна недавняя работа С. Кикотя и др. [22], в которой рассматривается вопрос о полноте по Крипке для строго позитивных логик. Известно, что строго позитивная логика полна по Крипке тогда и только тогда, когда она является строго позитивным фрагментом некоторой нормальной модальной логики. В отличие от модальных логик, не полных по Крипке, существуют простые примеры не полных по Крипке строго позитивных логик — например, логика, порождённая аксиомой $\Diamond p \to \Diamond q$. В работе [22] доказано, что все расширения модальной логики $S5$, за исключением двух, полны по Крипке; также показано, что проблема полноты по Крипке алгоритмически неразрешима. Рассматривается также обратный вопрос — можно ли определить данный класс шкал Крипке с помощью только формул строго позитивной логики. Найдено необходимое для этого условие и примеры неопределимых (в этом смысле) классов шкал. В частности, неопределимым является класс линейных шкал, характеризующий логику $K4.3$.

**Цель работы и основные задачи** В настоящей работе исследуются следующие вопросы для строго позитивных логик.

*Аксиоматизация строго позитивных фрагментов модальных логик.* Вопрос удобной строго позитивной аксиоматизации фрагментов стандартных модальных логик имеет значение для применений в логике доказуемости, поскольку корректность арифметической интерпретации мы обычно устанавливаем индукцией по длине формального вывода. Наличие удобной для анализа аксиоматизации также позволяет применить к исследованию строго позитивных логик синтаксические методы.

К стандартным логикам, для строго позитивных фрагментов которых до работ автора не было известно удобной аксиоматизации, относятся логика $S5_n$ (соответствующая эпистемической логике с $n$ агентами) и логика $K4.3$ (логика транзитивных линейных шкал). В настоящей работе мы находим такую аксиоматизацию и доказываем разрешимость за полиномиальное время строго позитивных фрагментов этих логик.

*Исследование модальных напарников строго позитивного фрагмента логики $K4$.* Мы рассматриваем следующую связь между модальными логиками и строго позитивными логиками [24]. Модальной логике $L$ сопоставляется ее строго позитивный фрагмент логики $\mathcal{SP}(L)$, который определяется как множество всех секвенций (импликаций между строго позитивными формулами) из $L$. По строго позитивной логике $P$ можно получить нормальную модальную логику $K \oplus P$ — замыкание $K \cup P$ относительно правил вывода modus ponens, подстановки и усиления (обозначение $\mathcal{ML}(P)$). Если $P = \mathcal{SP}(L)$, то мы называем $L$ *модальным напар-*

*ником* $P$. Отображения $\mathcal{SP}$ и $\mathcal{ML}$ вместе образуют соответствие Галуа, аналогичное соответствию между модальными и суперинтуиционистскими логиками.

Для суперинтуиционистских логик это соответствие было подробно изучено, начиная с работы [25]. Известно, что у каждой суперинтуиционистской логики есть наибольший модальный напарник, и что соответствующие отображения являются изоморфизмами решёток расширений интуиционистской логики $IPC$ и нормальных расширений логики Гжегорчика $Grz$ (теорема Блока–Эсакиа, см. [26]). Вопрос о существовании наибольшего модального напарника для строго позитивных логик был поставлен Беклемишевым в [24], в частности, для строго позитивного фрагмента логики $K4$. Мы получаем отрицательный ответ на данный вопрос и показываем, что у строго позитивной логики $\mathcal{SP}(K4)$ есть как минимум два различных максимальных модальных напарника. До сих пор примеров нормальных строго позитивных модальных логик, имеющих более одного максимального модального напарника, не было известно.

В качестве известных примеров можно указать отображение $\mathcal{ML}_{S4.3}(P) = S4.3 \oplus P$, которое исследуется в работе [21], или отображение $\mathcal{ML}_{S5}(P) = S5 \oplus P$ из работы [1]. При этом у любой строго позитивной логики, расширяющей $\mathcal{SP}(S4.3)$, максимальный модальный напарник единственен [21, Теоремы 5.2, 5.3]. То же верно и для строго позитивных логик, расширяющих $\mathcal{SP}(S5)$ — с одной стороны, просто потому, что $S4.3 \subset S5$, с другой стороны, этот факт можно установить и отдельно, поскольку известны все строго позитивные логики, расширяющие $\mathcal{SP}(S5)$, и известны все нормальные расширения логики $S5$ [27].

В данной работе мы анализируем расширения логики $K4$, используя для этого введенные М. Захарьящевым (см. [28, Section 9]) канонические формулы шкал. Хотя мы не получаем полного описания всех модальных напарников логики $\mathcal{SP}(K4)$, тем не менее, мы описываем множество всех модальных напарников $\mathcal{SP}(K4)$ в классе расширений $K4$ каноническими формулами иррефлексивных шкал, включая наибольшую логику в этом множестве. Также мы находим критерий того, является ли некоторая модальная логика модальным напарником $\mathcal{SP}(K4)$, и показываем, что логика Гёделя-Лёба $GL$ не является максимальным модальным напарником $\mathcal{SP}(K4)$. Это дает ответ на еще один вопрос, поставленный Л.Д. Беклемишевым [24].

*Отношение следования на строго позитивных формулах как стройный предпорядок.* В работе также рассматривается отношение следования на строго позитивных формулах как отношение предпорядка. Основной результат данного раздела диссертации состоит в том, что в логике $K4$ это отношение, ограниченное на формулы от фиксированного конечного числа переменных, является стройным предпорядком, то есть не содержит бесконечных убывающих цепей и бесконечных антицепей.

Теория стройных предпорядков (известных в англоязычной литературе как well-quasi orders) хорошо известна и интересна с точки зрения теории множеств и комбинаторики, поскольку многие естественные структуры, такие как порядок на словах и порядок на деревьях [29, 30], порядок по отношению «быть минором» на графах, являются стройными предпорядками. Одна из наиболее важных таких структур, как показано в статье [31] — стройный предпорядок по вложению на линейных порядках.

Стройные предпорядки также активно используются для доказательства терминируемости систем переписывания термов (например, как в статье [32]) и применяются для исследования проблемы разрешимости фрагментов логики предикатов (см. [33]). Известны и применения стройных предпорядков и в теории доказательств — например, финитная форма теоремы Крускала даёт пример естественного комбинаторного утверждения, не доказуемого в сильной арифметической теории $\mathrm{ATR}_0$ [34]. Более подробный логический анализ теоремы Крускала, вместе с её финитной формой и выводом ординального типа стройного предпорядка на деревьях, дан в статье [35]. В статье [36] обсуждается соответствие между другим независимым от арифметики Пеано комбинаторным утверждением — принципом Червя — и известным стройным предпорядком на словах из натуральных чисел или, что то же, на замкнутых модальных формулах полимодальной логики доказуемости $GLP^{-}$. Этот стройный порядок имеет природу, близкую к изучаемому в настоящей работе.

Современные результаты о стройных предпорядках собраны в книге [37], в частности, в статье [38] рассматриваются различные ординальные характеристики стройных предпорядков, в том числе их ординальный тип. Мы находим верхнюю и нижнюю оценки ординального типа для исследуемого стройного предпорядка на строго позитивных формулах, однако между этими границами в настоящее время остается зазор.

**Научная новизна**

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

**Теоретическая и практическая значимость работы**

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для модальной логики, а также для теории стройных порядков.

**Методы исследования**

В диссертации используются метод канонической модели, метод добавления вершин в модель, линеаризация дерева, характеристические формулы и другие классические методы модальной логики. Также используются теорема Крускала и лемма о квазивложении из теории стройных порядков.

**Основные положения, выносимые на защиту**

1. Получены конечная аксиоматизация и результат о полиномиальной разрешимости строго позитивного фрагмента логики $K4.3$.

2. Доказано, что естественный порядок следования в $K4$ на строго позитивных формулах от фиксированного числа переменных является

стройным предпорядком (well-quasi order); также получены оценки на его ординальный тип.

3. Получен критерий того, является ли модальная логика модальным напарником $K4^+$, и с его помощью установлено, какие из расширений $K4$ конфинальными формулами являются модальными напарниками. В частности, доказано, что у $K4^+$ есть хотя бы два различных максимальных модальных напарника.

**Апробация результатов**

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных конференциях и семинарах:

— Международная конференция «Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles», Россия, 2017.

— Международная конференция «Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles», Испания, 2019.

— Семинар отдела математической логики «Теория доказательств», МИАН;

— Семинар «Современные проблемы математической логики», ВШЭ.

**Публикации**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 работах. Две из них опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК; 2 из них — в журналах, индексируемых базой Scopus; 2 из них — в журналах, индексируемых базой Web of Science. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором диссертации самостоятельно.

**Содержание работы**

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор известных результатов, связанных с различными свойствами строго позитивных фрагментов.

В разделе 2 даны следующие определения:

*Формулы* модальной логики строятся из переменных $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$ и константы $\top$ с использованием логических связок $\wedge$, $\neg$ и унарной модальности $\Diamond$. Символы $\vee$, $\to$, $\Box p = \neg\Diamond\neg p$ и $\Box^+ p = p \wedge \Box p$ мы используем как стандартные сокращения.

*Нормальная модальная логика* — множество модальных формул, замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и введения модальности. Минимальная нормальная модальная логика традиционно обозначается $K$; символ $\oplus$ обозначает добавление в логику формул и затем замыкание относительно данных правил. Например, $K \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ есть логика $K4$.

*Строго позитивные формулы* — модальные формулы, построенные только с помощью связок $\wedge$ и $\Diamond$.

*Секвенция* — формула вида $A \to B$, где $A$ и $B$ — строго позитивные формулы.

*Строго позитивный фрагмент* модальной логики $L$ — множество всех секвенций в $L$ (обозначение $\mathcal{SP}(L)$).

Исчисление строго позитивной логики $K^+$ состоит из следующих аксиом и правил вывода:

1. $A \to A, A \to \top,\ \ \dfrac{A \to B,\ \ B \to C}{A \to C}$

2. $A \wedge B \to A,\ \ A \wedge B \to B,\ \ \dfrac{A \to B, A \to C}{A \to B \wedge C}$

3. $\dfrac{A \to B}{\Diamond A \to \Diamond B}$

В общем случае, *строго позитивная логика* — множество секвенций, замкнутое относительно перечисленных выше правил вывода. Это соответствует семантике (нижних) полурешёток с монотонными операторами (SLO, для краткости): в $K^+$ выводятся те и только те секвенции, которые верны в любой SLO. Обозначим $K4^+$ исчисление $K^+$ вместе с аксиомой $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$.

Далее определена стандартная семантика Крипке:

- *Шкала Крипке* — пара $\mathcal{F} = (W, R)$, где $W$ — непустое множество вершин, а $R$ — бинарное отношение на $W$.

- *Модель Крипке* — тройка $\mathcal{M} = (W, R, V)$, где $(W, R)$ — шкала Крипке, а $V$, или *оценка*, — произвольное отображение $V\colon \mathrm{Var} \to 2^W$.

- Оценка переменных $V(p)$ влечёт оценку формул $V(\varphi)$, где $\varphi$ — произвольная модальная формула. Оценка определяется индукцией по построению $\varphi$: $V(\top) = W$, $V(\neg\varphi) = W \setminus V(\varphi)$, $V(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = V(\varphi_1) \cap V(\varphi_2)$, $V(\Diamond\varphi) = \{x \mid \exists y \in V(\varphi)\, xRy\}$.

- Будем писать $\mathcal{M}, x \models \varphi$, если $x \in V(\varphi)$ и $\mathcal{M} \models \varphi$, если $V(\varphi) = W$. Мы также пишем $\mathcal{F} \models \varphi$, если $\mathcal{M} \models \varphi$ для каждой модели $\mathcal{M}$, построенной на этой шкале.

- Пусть $L$ — модальная логика, а $\mathcal{F}$ — шкала Крипке; мы говорим, что $\mathcal{F}$ — шкала логики $L$, если $\varphi \in L \Rightarrow \mathcal{F} \models \varphi$, для любой модальной формулы $\varphi$.

- Если $C$ — класс шкал Крипке (или моделей), а $L$ — модальная логика, мы говорим, что логика $L$ характеризуется $C$ (или что $L$ — логика класса $C$), если $\varphi \in L \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \varphi$, для каждой формулы $\varphi$ и шкалы (модели) $\mathcal{F} \in C$. Например, логика $K4$ — логика всех транзитивных шкал. Также в диссертации обсуждаются логики $S5 = K4 \oplus (\Box p \to p) \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ — логика отношений эквивалентности, $K4.3 = K4 \oplus \Box(\Box^+ p \to q) \vee \Box(\Box^+ q \to p)$ — логика линейных шкал и логика Гёделя-Лёба $GL = K4 \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ — логика транзитивных шкал, не содержащих бесконечных возрастающих цепей.

- Чтобы указать переменные, истинные в некоторой вершине модели Крипке, мы испольуем обозначение $\mathrm{Var}(x) = \{p \mid x \in V(p)\}$.

Затем даны определения гомоморфизма и канонического дерева.

Пусть $\mathcal{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $\mathcal{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — транзитивные модели Крипке. Отображение $f\colon W_1 \to W_2$ — *гомоморфизм*, если:

1. $\forall x, y \in W_1\; xR_1y \to f(x)R_2f(y)$;

2. $\forall x \in W_1\; \mathrm{Var}_1(x) \subset \mathrm{Var}_2(f(x))$.

Если у обеих моделей есть корень и $f(r(\mathcal{M}_1)) = r(\mathcal{M}_2)$, мы называем $f$ *корневым* гомоморфизмом.

Для каждой строго позитивной формулы $A$ её *каноническое дерево* $T[A]$ — древовидная модель Крипке.

Если $A$ — переменная или константа $\top$, то $T[A]$ — модель из единственной вершины, в которой истинна $A$.

Если $A = B \wedge C$, то $T[A]$ образуется из $T[B]$ и $T[C]$ объединением их корней. В новом корне истинны те и только те переменные, которые истинны в корне $T[B]$ или в корне $T[C]$.

Если $A = \Diamond B$, то $T[A]$ образуется из $T[B]$ добавлением нового корня, в котором все переменные ложны, и из которого достижимы все вершины $T[B]$.

**Теорема 1.** *[8] Пусть $A, B$ — строго позитивные формулы. Следующие утверждения эквивалентны:*

*(i)* $K4^+ \vdash (A \to B)$;

*(ii)* $T[A], r(T[A]) \models B$;

*(iii) существует корневой гомоморфизм* $f\colon T[B] \to T[A]$.

Затем, следуя книге А. Чагрова и М. Захарьящева [28], дано определение канонических формул шкал $\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D}, \bot)$ и $\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ (здесь $\mathcal{F}$ — произвольная конечная транзитивная шкала Крипке с корнем, $\mathcal{D}$ — некоторое множество антицепей в $\mathcal{F}$, исключая рефлексивные вершины, $\mathcal{D}^\#$ —

множество всех таких антицепей в $\mathcal{F}$) и указана их связь с нормальными расширениями $K4$.

**Теорема.** *[28, Theorem 9.39] Для любой транзитивной шкалы $\mathcal{S}$,*

*(i) $\mathcal{S} \not\models \alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D}, \bot)$, если и только если существует конфинальная редукция с $\mathcal{S}$ на $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условиям замкнутой области для всех антицепей из $\mathcal{D}$;*

*(ii) $\mathcal{S} \not\models \alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D})$, если и только если существует редукция с $\mathcal{S}$ на $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условиям замкнутой области для всех антицепей из $\mathcal{D}$.*

**Теорема.** *[28, Theorem 9.43] Существует алгоритм, который по произвольной модальной формуле $\varphi$ выдаёт набор канонических формул шкал $\alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{D}_1, \bot), \alpha(\mathcal{F}_2, \mathcal{D}_2, \bot), \ldots, \alpha(\mathcal{F}_n, \mathcal{D}_n, \bot)$ такой, что $K4 \oplus \varphi = K4 \oplus \alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{D}_1, \bot) \oplus \alpha(\mathcal{F}_2, \mathcal{D}_2, \bot) \oplus \ldots \oplus \alpha(\mathcal{F}_n, \mathcal{D}_n, \bot)$.*

Также даны определения стройного порядка (предпорядка) и его ординального типа.

Пара $(\mathscr{A}, \preceq)$, где $\preceq$ — бинарное отношение на множестве $\mathscr{A}$, называется *предпорядком*, если отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно. Аналогично, частичным порядком (или частично упорядоченным множеством) называется рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение; рассмотрев фактормножество по отношению эквивалентности, мы можем получить частичный порядок из любого предпорядка.

Предпорядок $(\mathscr{A}, \preceq)$ называется *стройным*, если для любой бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ элементов из $\mathscr{A}$ существует пара индексов $i < j$ такая, что $a_i \preceq a_j$. Мы будем использовать эквивалентное определение, а именно — любая бесконечная последовательность содержит не только пару элементов $a_i \preceq a_j$, но и бесконечную неубывающую подпоследовательность. *Стройным порядком* мы будем называть стройный частичный порядок; ясно, что, если $(\mathscr{A}, \preceq)$ — стройный предпорядок, то $(\mathscr{A}/_{\sim}, \preceq)$ (фактормножество по отношению эквивалентности $\preceq$) — стройный порядок.

Если $(X, \preceq)$ — стройный порядок, мы можем рассмотреть всевозможные его расширения до линейного порядка и найти точную верхнюю грань соответствующих ординалов; будем называть эту точную верхнюю грань *ординальным типом* и обозначать $o(X, \preceq)$. В статье [39] показано, что такая точная верхняя грань является максимумом, то есть на некотором линейном расширении порядка $\preceq$ в точности достигается.

Ординальным типом стройного предпорядка $(X, \preceq)$ называется ординальный тип соответствующего стройного порядка $(X/_{\sim}, \preceq)$.

В разделе 3 рассматривается строго позитивный фрагмент полимодальной логики $S5_m$, то есть логики $m$ отношений эквивалентности. Мы указываем его аксиоматизацию $S5_m^+$ с помощью перевода в позитивный язык модальных аксиом, соответствующих на шкалах Крипке свойствам транзитивности, рефлексивности и евклидовости. Далее сформулирована

**Теорема 2.** *В $S5_m^+$ выводимы те и только те секвенции, которые выводимы в $S5_m$.*

Чтобы доказать теорему, мы используем по сути метод канонической модели. Мы определяем модель $\mathcal{M} = (W, R_1 \dots R_m, v)$, состоящую из всех непустых $S5_m^+$-теорий, и показываем, что в этой модели истинны те же секвенции, что и в логике $S5_m^+$; поскольку все отношения в модели $\mathcal{M}$ суть отношения эквивалентности, это доказывает теорему.

Затем мы определяем аналог канонического дерева $(\tilde{T})$ для логики $S5_m$ и доказываем для него утверждение, аналогичное теореме 1:

**Теорема 3.** *Пусть $A, B$ — произвольные строго позитивные формулы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*(i)* $S5_m^+ \vdash (A \to B)$;

*(ii)* $\tilde{T}[A], r(A) \models B$;

*(iii) существует корневой гомоморфизм* $f : \tilde{T}[B] \to \tilde{T}[A]$.

Так как проверка выводимости секвенции $A \to B$ в логике $S5_m$ сводится к проверке истинности формулы $B$ в модели Крипке $\tilde{T}[A]$, это доказывает

**Следствие.** *Строго позитивный фрагмент логики $S5_m$ разрешим за полиномиальное время.*

В разделе 4 рассматривается строго позитивный фрагмент логики линейных шкал $K4.3$. Мы показываем, что по каноническому дереву можно получить все его линеаризации с помощью последовательных элементарных преобразований (заимствуя идею из неопубликованной работы С. Каниськина [40], где по сути то же сделано для строго позитивного фрагмента логики $K4.3$ с дизъюнкцией). Далее мы вводим секвенцию $comwit_2 = \Diamond(p \wedge \Diamond q_1) \wedge \Diamond(p \wedge \Diamond q_2) \to \Diamond(p \wedge \Diamond q_1 \wedge \Diamond q_2)$, которая заменяет аксиому (.3) в строго позитивном фрагменте, определяем для транзитивной модели Крипке $\mathcal{M}$ её пополнение антицепями $\mathcal{M}^{\Upsilon}$ и доказываем следующую теорему:

**Теорема 4.** *Пусть $A, B$ — строго позитивные формулы. Следующие утверждения эквивалентны:*

*(i)* $T[A]^{\Upsilon}, \{r(A)\} \models B$;

*(ii)* $K4^{+} + comwit_2 \vdash A \to B$;

*(iii)* $(A \to B) \in K4.3$;

*(iv) $B$ истинна в корне любой линеаризации $T[A]$.*

Наконец, мы указываем, что логика класса цветковых шкал (в которых, в отличие от линейных шкал, допустимы попарно несравнимые максимальные элементы) имеет тот же строго позитивный фрагмент, что и $K4.3$.

Назовем отношение $R$ *цветковым*, если оно транзитивно и все немаксимальные элементы сравнимы.

**Теорема 5.** *Множество теорем исчисления $K4.3^+$ совпадает со строго позитивным фрагментом модальной логики класса цветковых шкал.*

В разделе 5 мы доказываем полиномиальную разрешимость строго позитивного фрагмента $K4.3^+$, для чего вводим алгебраическую структуру на модели Крипке $\mathcal{M} = (W, R, v)$. А именно, мы определяем функцию $g$, которая по строго позитивной формуле вычисляет некоторый набор подмножеств $W$, и функцию $f$, которая по такому набору выдаёт подмножество антицепей в $W$. С помощью вспомогательных лемм, устанавливающих свойства этих функций, доказана

**Теорема 6.** *Пусть $X$ — любая вершина модели $\mathcal{M}^{\curlyvee}$, $A$ — произвольная строго позитивная формула. Тогда $\mathcal{M}^{\curlyvee}, X \models A$, если и только если $X \in f(g(A))$.*

Далее полиномиальная разрешимость фрагмента $K4.3^+$ выводится из теорем 4, 6 и того, что функции $f$, $g$ полиномиально вычислимы.

В разделе 6 рассматривается множество $Fm$ строго позитивных формул от фиксированного набора переменных и отношение $\preceq$ на нём, определённое как $A \preceq B$, если в $K4$ выводится $B \to A$ (то есть обратное естественному порядку импликации). Доказана

**Теорема 7.** *Отношение $\preceq$ является стройным предпорядком.*

Затем даны определения негативной формулы, негативной теории, двойственного оператора * на формулах и теории, двойственной к данной строго позитивной; доказана

**Теорема 8.** *Пусть $T$ — строго позитивная теория на конечном наборе переменных, замкнутая относительно аксиом и правил вывода $K4^+$. Тогда у двойственной теории $T^*$ есть конечная аксиоматизация.*

Наконец, с помощью вспомогательных лемм (в том числе ординальный тип порядка на строках [39] и лемма о квазивложении [41]) получены оценки на ординальный тип рассматриваемого стройного предпорядка $\preceq$:

**Теорема 9.** *Ординальный тип предпорядка* $(Fm, \preceq)$ *на* $n$ *переменных не менее* $\omega^{\omega^{2^n-1}}$.

**Теорема 10.** *Ординальный тип предпорядка* $(Fm, \preceq)$ *на* $n$ *переменных не превосходит* $\varepsilon_0 \times 2^n$.

В разделе 7 мы вводим понятие базового множества для модели Крипке — эквивалентное ей (в смысле истинности произвольной строго позитивной формулы) множество моделей Крипке. С его помощью доказан следующий критерий модального напарника:

**Теорема 11.** *Пусть* $L$ *— нормальное расширение* $K4$*, которое характеризуется классом моделей* $C$*. Тогда* $L$ *есть модальный напарник* $K4^+$*, если и только если для любой строго позитивной формулы* $A$*, существует множество моделей* $\mathfrak{M}(A)$*, являющееся базовым множеством для* $T[A]$ *и подмножеством* $C$*.*

Также, используя свойства стройного предпорядка из предыдущего раздела, доказана более сильная версия этого критерия:

**Теорема 12.** *Пусть* $L$ *— нормальное расширение* $K4$*, которое характеризуется классом моделей* $C$*. Тогда* $L$ *— модальный напарник* $K4^+$*, если и только если для любой строго позитивной формулы* $A$*, существует* ***конечное*** *множество* ***конечных*** *моделей* $\mathfrak{M}(A)$*, которое является базовым для* $T[A]$*, и каждая модель в* $\mathfrak{M}(A)$ *есть подмодель некоторой модели из* $C$*.*

В разделе 8 мы с помощью критерия устанавливаем, какие логики являются (или не являются) модальными напарниками $K4^+$. Для удобства мы вводим следующие обозначения: $\mathcal{F}_0$ — минимальная нелинейная шкала с корнем, $\mathcal{F}_1$ — минимальная недревовидная шкала с корнем, $\mathcal{F}_n^{lin}$ — линейная шкала из $n$ вершин. Доказаны

**Лемма 1.** *Логика* $K4 \oplus \alpha(\mathcal{F}_n^{lin}, \mathcal{D}^{\#}, \bot)$ *не является модальным напарником* $K4^+$*.*

**Лемма 2.** *Логика* $K4 \oplus \alpha(\mathcal{F}_0, \emptyset, \bot) \oplus \alpha(\mathcal{F}_1, \emptyset, \bot)$ *является модальным напарником* $K4^+$.

**Теорема 13.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— множество конечных иррефлексивных транзитивных шкал с корнем. Тогда логика* $K4 \oplus \{\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D}, \bot) \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}\}$ *(где множества антицепей* $\mathcal{D}$ *выбраны произвольно) является модальным напарником* $K4^+$*, если и только в* $\mathfrak{F}$ *нет линейных шкал.*

Следующие две леммы показывают, что логика $GL$ не является максимальным модальным напарником:

**Лемма 3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— множество всех нелинейных шкал высоты* $k$*. Тогда логика* $GL \oplus \{\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D}^{\#}, \bot) \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}\}$ *является модальным напарником* $K4^+$.

Обозначим $\mathfrak{F}_k$ — множество всех нелинейных шкал высоты не более, чем $k$, и $L_k = GL \oplus \{\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{D}^{\#}, \bot) \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_k\}$.

**Лемма 4.** *Логика* $\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$ *является модальным напарником* $K4^+$.

**Лемма 5.** *Логика* $GL \oplus \alpha(\mathcal{F}_0, \emptyset, \bot)$ *не является модальным напарником* $K4^+$.

Поскольку по отдельности логики $GL$ и $K4 \oplus \alpha(\mathcal{F}_0, \emptyset, \bot)$ являются модальными напарниками $K4^+$, то получаем

**Теорема 14.** *У логики* $K4^+$ *есть хотя бы два различных максимальных модальных напарника.*

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Получены конечная аксиоматизация и результат о полиномиальной разрешимости строго позитивного фрагмента для логики $K4.3$.

2. Доказано, что естественный порядок следования в $K4$ на строго позитивных формулах от фиксированного числа переменных является стройным предпорядком (well-quasi order); также получены оценки на его ординальный тип.

3. Получен критерий того, является ли модальная логика модальным напарником $K4^+$, и с его помощью установлено, какие из расширений $K4$ конфинальными формулами являются модальными напарниками. В частности, доказано, что у $K4^+$ есть хотя бы два различных максимальных модальных напарника.

Также указывается несколько направлений для дальнейшего исследования. Во-первых, интересно продолжить анализ расширений $K4$ на предмет того, являются ли они модальными напарниками $K4^+$, и в том числе получить больше примеров модальных формул, которые имеют нетривиальные следствия в виде секвенций (как было показано в лемме 5). Во-вторых, интересно было бы точнее оценить ординальный тип стройного предпорядка на строго позитивных формулах от $n$ переменных. Из полученных нами оценок неясно в том числе то, зависит ли этот ординальный тип от параметра $n$. Третье возможное направление – изучение строго позитивных фрагментов других модальных логик, помимо рассмотренных $S5_m$ и $K4.3$; например, для каждой логики из данной работы, не являющейся модальным напарником $K4^+$, мы указали конкретную секвенцию, которую эта логика содержит. Отталкиваясь от этой секвенции, можно найти аксиоматизацию строго позитивного фрагмента одной из таких логик.

# Список литературы


[1] M. Jackson 'Semilattices with closure', *Algebra Universalis* 52:1–37, 2004.

[2] *Baader F., Brandt S., Lutz C.* Pushing the EL envelope. // Proc. of the 19th Joint International Conference of Artificial Intelligence. — 2005.

[3] *Baader F., Brandt S., Lutz C.* Pushing the EL envelope. // LTCS-Report 05-01, Institute for Theoretical Computer Science, Dresden University of Technology. — 2005.

[4] *Baader F., Brandt S., Suntisrivaraporn* Is tractable reasoning in extensions of the description logic EL useful in practice?. // Proc. of the Methods for Modalities Workshop, Berlin, Germany. — 2005.

[5] Л. Д. Беклемишев, Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике, УМН, 60:2(362) (2005), 3–78; Russian Math. Surveys, 60:2 (2005), 197–268.

[6] *Boolos G.* The Logic of Provability. // Cambridge University Press. — 1993.

[7] *Shapirovskiy I.* PSPACE–decidability of Japaridze's polymodal logic. // Advances in Modal Logic. — 2008. — V. 7 (College Publications, London). — P. 289–304.

[8] E. V. Dashkov, 'On the positive fragment of the polymodal provability logic GLP', *Matematicheskie Zametki*, 91(3):331–346, 2012. English translation: *Mathematical Notes*, 91(3):318–333, 2012.

[9] L. D. Beklemishev, 'Positive provability logic for uniform reflection principles', *Annals of Pure and Applied Logic*, 165:82–105, 2014.

[10] *Beklemishev L. D.* On the reflection calculus with partial conservativity operators. // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — V. 10388. — P. 48–67.

[11] *Beklemishev L. D.* A universal algebra for the variable-free fragment of $\mathrm{RC}^{\nabla}$. // Symposium on Logical Foundations of Computer Science, S. Artemov and A. Nerode, editors, Lecture Notes in Computer Science. — 2018.

[12] *Pakhomov F., Walsh J.* Reducing $\omega$-model reflection to iterated syntactic reflection. // Journal of Mathematical Logic. — 2023. — V. 23.

[13] *Joosten J. J.* Turing–Taylor expansions of arithmetical theories. // Stud. Logica 104, 1225–1243 (2015). https://doi.org/10.1007/s11225-016-9674-z

[14] *Fernandez-Duque, Joosten J. J.* Models of transfinite provability logic. // J. Symbol. Logic 78 (2), 543– 561 (2013).

[15] *Hermo Reyes E., Joosten J. J.* The logic of Turing progressions. // ArXiv:1604.08705v2 [math.LO], 2017

[16] *Borges A., Joosten J. J.* Strictly Positive Fragments of the Provability Logic of Heyting Arithmetic. // https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.14727

[17] *Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Islands of Tractability for Relational Constraints: Towards Dichotomy Results for the Description of Logic EL. // Advances in Modal Logic. — 1998. — P. 271–291.

[18] *Gabbay D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications. // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. — 2003. 2003.

[19] *Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Islands of tractability for relational constraints: towards dichotomy results for the description logic EL. // London, UK: College Publications. — 2010. — P. 271–291.

[20] *Kikot S., Kurucz A., Tanaka Y., Wolter F., Zakharyaschev M.* On the completeness of EL-equations: First results. // 11th International Conference on Advances in Modal Logic, Short Papers (Budapest, 30 August-2 September, 2016). — P. 82–87.

[21] *Kikot S., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* On strictly positive modal logics with S4.3 frames. // *Advances in Modal Logic, Vol.12* (eds.: G.Bezhanishvili, G.D'Agostino, G.Metcalfe and T.Studer), College Publications (2018), pp.399-418.

[22] *Kikot S., Kurucz A., Tanaka Y., Wolter F., Zakharyaschev M.* Kripke completeness of strictly positive modal logics over meet-semilattices with operators. // *Journal of Symbolic Logic*, vol.84(2019), pp.533-588.

[23] *Kikot S., Kudinov A.* On Strictly Positive Fragments of Modal Logics with Confluence. // Mathematics 2022, 10, 3701.

[24] L. D. Beklemishev, 'A note on strictly positive logics and word rewriting systems', In: S. Odintsov, Larisa Maksimova, editors, on Implication, Interpolation, and Definability. Outstanding Contributions to Logic series, v. 15, Springer, 2017, pp. 61–70. Preprint ArXiv:1509.00666, 2015.

[25] L. L. Maksimova, V. V. Rybakov, 'Lattices of modal logics', *Algebra i Logika*, 13:105–122, 1974.

[26] W. J. Blok, 'Varieties of interior algebras'. Doctoral thesis, 1976.

[27] Scroggs, S. 'Extensions of the Lewis system S5', *The Journal of Symbolic Logic*, v. 16(2), 1951, pp. 112–120.

[28] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford University Press, 1997.

[29] *Kruskal J. B.* The theory of well quasi-ordering: a frequently discovered concept // J. Combin. Theory. — 1972. — Ser. A 13. — P. 297–305.

[30] *Nash-Williams C.St.J.A.* On well-quasi-ordering finite trees. // Proceedings of Cambridge Phil.Soc 59. — 1963. — P. 833–835.

[31] *Laver R.* On Fraisse's order type conjecture. // Annals of Mathematics. — 1971. — V. 93. — P. 89–111.

[32] *Dershowitz N., Manna Z.* Proving termination with multiset orderings. // Lecture Notes in Computer Science. — 1979. — V. 71. — P. 188–202.

[33] *Egon Borger, Erich Gradel, Yuri Gurevich.* The Classical Decision Problem. — 1997.

[34] *Simpson S. G.* Nichtbeweisbarkeit von gewissen kombinatorischen Eigenschaften endlicher Baume. // Arch. Math. Logik Grundlag. — 1985. — V. 25 (1). — P. 45–65.

[35] *Gallier J.* What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal $\Gamma_0$? A survey of some results in proof theory. // Annals of Pure and Applied Logic. — 1991. — V. 53. — P. 199–260.

[36] *Carlucci L.* Worms, gaps, and hydras. // Mathematical Logic Quarterly. — 2005. — V. 51 (4). — P. 342–350.

[37] *Schuster P., Seisenberger M., Weiermann A.* (editors) Well-Quasi Orders in Computation, Logic, Language and Reasoning. // Trends in Logic. — 2020. — V. 53.

[38] *Dzamonja M., Schmitz S., Schnoebelen P.* On Ordinal Invariants in Well Quasi Orders and Finite Antichain Orders. // Well-Quasi Orders in Computation, Logic, Language and Reasoning. — 2020. — Trends in Logic, V. 53 (Schuster P., Seisenberger M., Weiermann A. editors), Springer, Cham. — P. 29–54.

[39] *D. H. J. de Jongh, Parikh R.* Well-partial orderings and hierarchies. // Nederl. Akad. Wetensch. — 1977. — Proc. Ser. A 80 = Indag. Math. 39, N. 3. — P. 195–207.

[40] С. Каниськин. О позитивных фрагментах модальных логик. Дипломная работа, МГУ, 2013 http://lpcs.math.msu.su/ zolin/msc/

[41] *Rathjen M., J. Van der Meeren, Weiermann A.* Well-partial-orderings and the big Veblen number. // Archive for Mathematical Logic. — 2015. — V. 54. — P. 193–230.

**Публикации автора по теме диссертации**

[42] М. В. Святловский. Аксиоматизация и полиномиальная разрешимость строго позитивных фрагментов некоторых модальных логик // Матем. Заметки, 103:6 (2018), с. 884–901

[43] Svyatlovskiy, M. Modal Companions of K4+. Studia Logica 110 (2022), c. 1327–1347

[44] М. В. Святловский. Стройный порядок на строго позитивных формулах // Труды МФТИ. Т.14, №3 (55), 129–138. 2022